Vektoranalysis

Die Maxwell Gleichungen - Integralform

Anwendungsbeispiel

Übersicht:

- Wiederholung: Maxwell Gleichungen
- Herleitung Integralform
- Bedeutung Integralform

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Maxwell Gleichungen

Maxwell Gleichungen für statische Felder

Elektrostatik	Magnetostatik
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Beobachtung:

Im statischen Fall, d.h. wenn die Felder zeitunabhängig sind, sind elektrische und magnetische Phänomene getrennt voneinander.

Maxwell Gleichungen

Vollständige Maxwell Gleichungen

Für allgemeine, zeitlich veränderliche E- und B-Felder gelten die folgenden vier Maxwell Gleichungen…

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ Gaußsches Gesetz

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$ Gaußsches Gesetz für Magnetfelder

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ Faradysche Induktionsgesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ Erweitertes Amperesches Gesetz

Herleitung Integralform

Gauß‘sches Gesetz

Wir betrachten ein Volumen V mit Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$…

→ Gesamtladung: $Q = \iiint_V \rho(\vec{x})\, dV$

Gaußsches Gesetz: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ → $\epsilon_0 \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \rho$

Wir integrieren über das Volumen und wenden den Gauß‘schen Integralsatz an…

$$Q = \iiint_V \rho \; dV = \epsilon_0 \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \; dV = \epsilon_0 \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gesamtladung — Gauß‘scher Satz

Vektoranalysis

Herleitung Integralform

Gauß‘sches Gesetz

Wir haben folgende beiden Versionen des Gauß‘schen Gesetzes…

Differentielle Form: $$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Integralform: $$Q = \epsilon_0 \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gesamtladung

elektrischer Fluss

Keine Ladung, kein Fluss

Bedeutung Integralform:

Der elektrische Fluss durch die Oberfläche ∂V des Volumens V ist proportional zur elektrischen Ladung (den Quellen) im Volumen.

Herleitung Integralform

Gauß‘sches Gesetz für Magnetfelder

Für Magnetfelder verschwindet die Divergenz…

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Wir integrieren beide Seiten über das Volumen V und wenden wieder Den Gauß‘schen Satz an…

$$\underbrace{\iiint_V 0 \; dV}_{=0} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \; dV = \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gauß‘scher Satz

Herleitung Integralform

Gauß‘sches Gesetz für Magnetfelder

Wir haben folgende beiden Versionen des Gauß‘schen Gesetzes…

Differentielle Form: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Integralform: $\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0$

magnetischer Fluss

Bedeutung Integralform:

Der magnetische Fluss durch die Oberfläche ∂V des Volumens verschwindet, da es keine magnetischen Monopole, also magnetische Quellen gibt.

Vektoranalysis

Herleitung Integralform

Faraday‘sches Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz lautet…

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Wir betrachten eine Fläche A die von der geschlossenen Kurve ∂A berandet wird und integrieren über die Fläche…

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} = \iint_{A} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = -\iint_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Stokes‘scher Satz

Vektoranalysis

Herleitung Integralform

Faraday‘sches Induktionsgesetz

Wir haben folgende beiden Versionen des Induktionsgesetzes…

Differentielle Form: $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Integralform: $\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} = -\iint_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA}$

elektrische Zirkulation

negative zeitliche Änderung des magnetische Flusses

Bedeutung Integralform:

Die (elektrische) Zirkulation über die Randkurve ∂A der Fläche A stimmt mit der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses über die Fläche überein.

Herleitung Integralform

Erweitertes Ampere‘sches Gesetz

Das Gesetz lautet in der differentiellen Form…

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Wir betrachten eine Fläche A die von der geschlossenen Kurve ∂A berandet wird und integrieren über die Fläche…

$$\oint_{\partial A}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dx} = \iint_{A}\operatorname{rot}\vec{B}\cdot\overrightarrow{dA} = \mu_0\iint_{A}\vec{j}\cdot\overrightarrow{dA} + \mu_0\epsilon_0\iint_{A}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{dA}$$

Stokes‘scher Satz

Gesamtstrom I

Vektoranalysis

Herleitung Integralform

Erweitertes Ampere‘sches Gesetz

Wir haben folgende beiden Versionen des Gesetzes…

Differentielle Form: $$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Integralform: $$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dx} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA}$$

magnetische Zirkulation | Gesamt-strom | zeitliche Änderung des elektrischen Flusses

Bedeutung Integralform:

Die magnetische Zirkulation über die Randkurve ∂A der Fläche A entspricht der Summe aus Gesamtstrom I und der zeitlichen Änderung des elektrischen Flusses durch die Fläche A.

Vektoranalysis

Differentielle und Integralform der Maxwell Gleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Gauß ⇔	$\epsilon_0 \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA} = \iiint_V \rho\ dV = Q$
Gauß'sches Gesetz: Das E-Feld ist ein Quellfeld. Die Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.		Der elektrische Fluss durch die Oberfläche ist proportional zur elektrischen Ladung im Volumen.
$div\ \vec{B} = 0$	Gauß ⇔	$\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = 0$
Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder: Das B-Feld ist quellfrei. Es gibt keine magnetischen Monopole.		Der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche ist gleich der magnetischen Ladungen, nämlich null.
$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Stokes ⇔	$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dx} = -\iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA}$
Faraday'sches Induktionsgesetz: Jede zeitliche Änderung des Magnetfeldes führt zu einem elektrischen Wirbelfeld.		Die elektrische Zirkulation durch die Randkurve ist gleich der negativen zeitlichen Änderung des magnetischen Fluss durch die Fläche.
$rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Stokes ⇔	$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dx} = \mu_0 \iint_A \vec{j} \cdot \overrightarrow{dA} + \mu_0 \epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dA}$
Erweitertes Ampere'sches Gesetz: Ströme und sich zeitlich ändernde E-Felder erzeugen magnetisches Wirbelfelder.		Die magnetische Zirkulation über den Flächenrand ist gleich der Summe aus Strom und dem zeitlich veränderlichem elektrischen Fluss durch die Fläche.

Differentielle und Integralform der Maxwell Gleichungen

Bemerkung: lokal und global

Bei der differentiellen Form der Maxwell Gleichung handelt es sich um eine lokale Beschreibung, da die Ableitungen jeweils in einem Punkt gelten.

Die Integralform ist eine globale Beschreibung, da Informationen über ein gesamtes Volumen oder eine Fläche in die Beschreibung eingeht.

lokale Dichte

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

lokal im Punkt der Ableitung

Integral über Fläche

$$Q = \epsilon_0 \oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Gesamtladung Ist global